

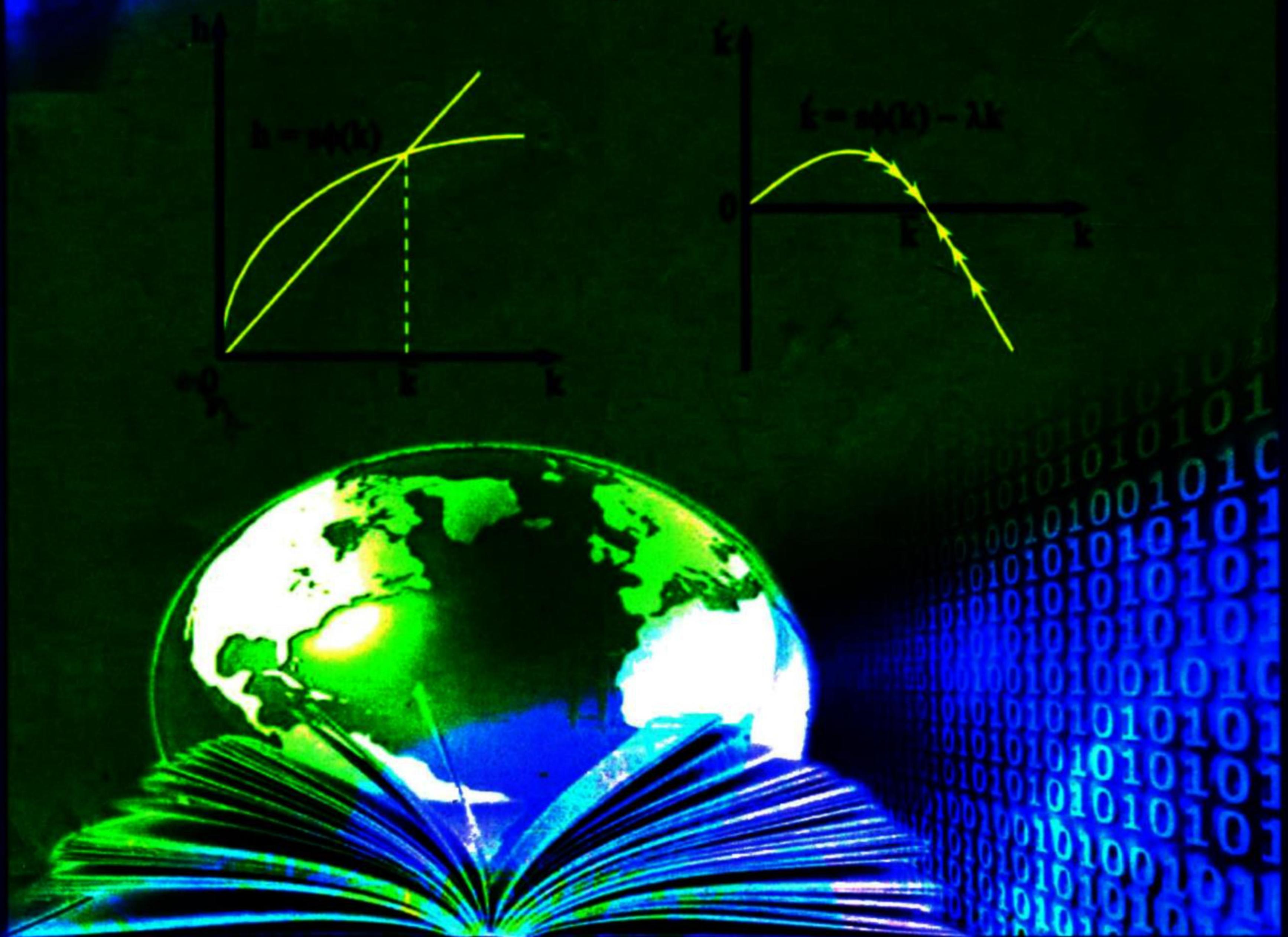


TRƯỜNG ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN  
**KHOA TOÁN KINH TẾ**

Lê Đình Thúy (Chủ biên)  
Nguyễn Quỳnh Lan

Giáo trình

# **TOÁN CAO CẤP CHO CÁC NHÀ KINH TẾ**



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN

2012



## MỤC LỤC

LỜI MỞ ĐẦU.....	15
<b>Chương 1. TẬP HỢP, QUAN HỆ VÀ LOGIC SUY LUẬN.....</b>	<b>19</b>
1.1 Tập hợp .....	19
1.1. Các khái niệm cơ bản .....	19
1.1. Các phép toán tập hợp .....	21
Thuật ngữ then chốt.....	24
Bài tập .....	24
1.2 Hệ thống số thực.....	25
1.2.1. Số thực .....	25
1.2.2. Biểu diễn hình học các số thực.....	26
1.2.3. Các khoảng số thực.....	28
1.2.4. Tập hợp bị chặn.....	30
Thuật ngữ then chốt.....	32
Bài tập .....	32
1.3 Quan hệ .....	32
1.3.1. Tích Des Cartes .....	32
1.3.2. Quan hệ .....	33
1.3.3. Ánh xạ .....	35
Thuật ngữ then chốt.....	38
Bài tập .....	38
1.4. Đại cương về logic suy luận .....	39
1.4.1. Mệnh đề và các phép liên kết mệnh đề .....	39
1.4.2. Hàm mệnh đề .....	43
1.4.3. Điều kiện cần và điều kiện đủ .....	46
1.4.4. Logic chứng minh mệnh đề .....	48
1.4.5. Phương pháp chứng minh quy nạp .....	50
Thuật ngữ then chốt.....	53
Bài tập .....	53
<b>Chương 2. KHÔNG GIAN VECTƠ SỐ HỌC n CHIỀU.....</b>	<b>55</b>
2.1 Các khái niệm cơ bản về hệ phương trình tuyến tính và phương pháp khử ẩn liên tiếp .....	55

2.1.1. Các khái niệm cơ bản về hệ phương trình tuyến tính .....	55
2.1.2. Hệ phương trình dạng tam giác và dạng hình thang .....	58
2.1.3. Phương pháp khử ẩn liên tiếp .....	61
2.1.4. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.....	67
Thuật ngữ then chốt.....	69
Bài tập .....	69
<b>2.2. Vectơ n chiều và không gian vectơ.....</b>	<b>770</b>
2.2.1. Khái niệm vectơ n chiều .....	770
2.2.2. Các phép toán vectơ.....	772
2.2.3. Không gian vectơ số học n chiều Khái niệm không gian con.....	774
2.2.4. Tích vô hướng của hai vectơ và khái niệm không gian Euclide.....	776
Thuật ngữ then chốt.....	778
Bài tập .....	778
<b>2.3. Các mối liên hệ tuyến tính trong không gian vectơ.....</b>	<b>779</b>
2.3.1. Tỗ hợp tuyến tính và phép biểu diễn tuyến tính .....	779
2.3.2. Sự phụ thuộc tuyến tính.....	83
2.3.3. Các định lý cơ bản về sự phụ thuộc tuyến tính .....	86
Thuật ngữ then chốt.....	89
Bài tập .....	89
<b>2.4. Cơ sở của không gian vectơ.....</b>	<b>991</b>
2.4.1. Cơ sở của không gian $\mathbb{R}^n$ .....	991
2.4.2. Tọa độ của vectơ trong một cơ sở .....	992
2.4.3. Cơ sở của không gian con.....	994
Thuật ngữ then chốt.....	995
Bài tập .....	995
<b>2.5. Hạng của một hệ vectơ.....</b>	<b>996</b>
2.5.1. Khái niệm cơ sở và hạng của hệ vectơ .....	996
2.5.2. Các định lý cơ bản về hạng .....	997
2.5.3. Các phép biến đổi không làm thay đổi hạng .....	999
Thuật ngữ then chốt.....	1001
Bài tập .....	1001

## Mục lục

<b>Chương 3. MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC .....</b>	<b>103</b>
<b>3.1. Ma trận và các phép toán tuyến tính đối với ma trận .....</b>	<b>103</b>
3.1.1. Các khái niệm cơ bản về ma trận .....	103
3.1.2. Các dạng ma trận .....	106
3.1.3. Các phép toán tuyến tính đối với ma trận .....	108
3.1.4. Các phép biến đổi ma trận .....	110
Thuật ngữ then chốt .....	111
Bài tập .....	112
<b>3.2. Định thức.....</b>	<b>113</b>
3.2.1. Hoán vị của n số tự nhiên đầu .....	113
3.2.2. Định nghĩa định thức cấp n .....	115
3.2.3. Minh họa định nghĩa: Tính các định thức cấp 1, 2, 3 .....	117
3.2.4. Các tính chất cơ bản của định thức .....	119
Thuật ngữ then chốt .....	126
Bài tập .....	126
<b>3.3. Các phương pháp tính định thức .....</b>	<b>129</b>
3.3.1. Phương pháp khai triển .....	129
3.3.2. Phương pháp biến đổi về dạng tam giác .....	132
Thuật ngữ then chốt .....	135
Bài tập .....	135
<b>3.4. Phép nhân ma trận và ma trận nghịch đảo .....</b>	<b>138</b>
3.4.1. Phép nhân ma trận .....	138
3.4.2. Ma trận nghịch đảo .....	142
3.4.3. Ứng dụng ma trận nghịch đảo .....	150
3.4.4. Tìm ma trận nghịch đảo bằng phương pháp biến đổi .....	152
Thuật ngữ then chốt .....	154
Bài tập .....	154
<b>3.5. Hạng của ma trận .....</b>	<b>159</b>
3.5.1. Khái niệm hạng của ma trận .....	159
3.5.2. Liên hệ giữa hạng của ma trận và các định thức con .....	160
3.5.3. Hạng của tổng và tích các ma trận .....	164
3.5.4. Các phương pháp tìm hạng của ma trận .....	165
3.5.5. Khảo sát một hệ vectơ .....	170

Thuật ngữ then chốt.....	1172
Bài tập .....	1172
<b>Chương 4. LÝ THUYẾT HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYỀN TÍNH .....</b>	<b>1177</b>
<b>4.1. Phương pháp ma trận và định thức .....</b>	<b>1177</b>
4.1.1. Hệ phương trình Cramer .....	1177
4.1.2. Phương pháp ma trận.....	1178
4.1.3. Quy tắc Cramer.....	1179
Thuật ngữ then chốt.....	1181
Bài tập .....	1181
<b>4.2. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát .....</b>	<b>1182</b>
4.2.1. Các dạng biểu diễn.....	1182
4.2.2. Điều kiện có nghiệm .....	1183
4.2.3. Khảo sát tổng quát hệ phương trình tuyến tính .....	1184
Thuật ngữ then chốt.....	1190
Bài tập .....	1190
<b>4.3. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất .....</b>	<b>1192</b>
4.3.1. Điều kiện tồn tại nghiệm không tầm thường.....	1192
4.3.2. Cấu trúc của tập hợp nghiệm .....	1193
4.3.3. Hệ nghiệm cơ bản .....	1194
4.3.4. Mối liên hệ với hệ không thuần nhất.....	1198
Thuật ngữ then chốt.....	2200
Bài tập .....	2200
<b>4.4. Một số mô hình tuyến tính trong kinh tế học.....</b>	<b>2201</b>
4.4.1. Mô hình cân bằng thị trường .....	2201
4.4.2. Mô hình cân bằng kinh tế vĩ mô.....	2204
4.4.3. Mô hình IS-LM .....	2206
4.4.4. Mô hình Input-Output của Leontief .....	2209
Thuật ngữ then chốt.....	2214
Bài tập .....	2215
<b>Chương 5. DẠNG TOÀN PHƯƠNG .....</b>	<b>2217</b>
<b>5.1. Các khái niệm cơ bản .....</b>	<b>2217</b>
5.1.1. Dạng toàn phương.....	2217

## Mục lục

51.2. Ma trận và hạng của dạng toàn phương .....	218
51.3. Dạng toàn phương chính tắc .....	219
Thuật ngữ then chốt .....	220
Bài tập .....	220
<b>52. Các phép biến đổi tuyến tính trong không gian <math>\mathbb{R}^n</math> .....</b>	<b>221</b>
52.1. Khái niệm biến đổi tuyến tính .....	221
52.2. Liên hệ với ma trận .....	222
52.3. Biến đổi cơ sở của không gian $\mathbb{R}^n$ .....	226
Thuật ngữ then chốt .....	229
Bài tập .....	229
<b>53. Biến đổi chính tắc hóa dạng toàn phương .....</b>	<b>230</b>
53.1. Biến đổi dạng toàn phương bằng phép biến đổi tuyến tính .....	230
53.2. Biến đổi một dạng toàn phương về dạng chính tắc .....	231
53.3. Luật quán tính .....	240
Thuật ngữ then chốt .....	241
Bài tập .....	241
<b>54. Dạng toàn phương xác định .....</b>	<b>242</b>
54.1. Khái niệm dạng toàn phương xác định và liên hệ với dạng chính tắc .....	242
54.2. Giá trị riêng của ma trận .....	244
54.3. Nhận diện dạng toàn phương xác định .....	247
Thuật ngữ then chốt .....	252
Bài tập .....	252
<b>Chương 6. HÀM SỐ VÀ GIỚI HẠN .....</b>	<b>255</b>
<b>€1. Các khái niệm cơ bản về hàm số .....</b>	<b>255</b>
€.1.1. Biến số .....	255
€.1.2. Quan hệ hàm số .....	257
€.1.3. Đồ thị của hàm số .....	260
€.1.4. Khái niệm hàm ngược .....	261
€.1.5. Một số đặc trưng hàm số .....	263
€.1.6. Các hàm số sơ cấp .....	266
€.1.7. Một số mô hình hàm số trong phân tích kinh tế .....	268
Thuật ngữ then chốt .....	272
Bài tập .....	272

<b>6.2. Dãy số và giới hạn của dãy số .....</b>	<b>2276</b>
6.2.1. Dãy số .....	2276
6.2.2. Giới hạn của dãy số .....	2277
6.2.3. Đại lượng vô cùng bé .....	2281
6.2.4. Các định lý cơ bản về giới hạn .....	2282
6.2.5. Cấp số nhân và ứng dụng trong phân tích tài chính.....	2289
Thuật ngữ then chốt.....	2293
Bài tập .....	2294
<b>6.3 Giới hạn của hàm số .....</b>	<b>2295</b>
6.3.1. Khái niệm giới hạn của hàm số .....	2295
6.3.2. Giới hạn của các hàm số sơ cấp cơ bản.....	2297
6.3.3. Các định lý cơ bản về giới hạn .....	2298
6.3.4. Hai giới hạn cơ bản dạng vô định.....	3002
Thuật ngữ then chốt.....	3006
Bài tập .....	3006
<b>6.4. Hàm số liên tục .....</b>	<b>3008</b>
6.4.1. Khái niệm hàm số liên tục.....	3008
6.4.2. Các phép toán sơ cấp đối với các hàm số liên tục .....	3311
6.4.3. Các tính chất cơ bản của hàm số liên tục trên một khoảng.....	3311
Thuật ngữ then chốt.....	3313
Bài tập .....	3313
<b>Chương 7 . ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN .....</b>	<b>3315</b>
<b>7.1. Đạo hàm của hàm số.....</b>	<b>3315</b>
7.1.1. Khái niệm đạo hàm .....	3315
7.1.2. Đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản .....	3319
7.1.3. Các quy tắc tính đạo hàm .....	3320
Thuật ngữ then chốt.....	3325
Bài tập .....	3325
<b>7.2. Vi phân của hàm số.....</b>	<b>3327</b>
7.2.1. Khái niệm vi phân và liên hệ với đạo hàm .....	3327
7.2.2. Các quy tắc tính vi phân.....	3329
Thuật ngữ then chốt.....	3330
Bài tập .....	3330

## Mục lục

<b>7.3. Các định lý cơ bản về hàm số khả vi.....</b>	<b>330</b>
7.3.1. Định lý Fermat.....	330
7.3.2. Định lý Rolle.....	331
7.3.3. Định lý Lagrange.....	332
7.3.4. Định lý Cauchy.....	335
Thuật ngữ then chốt.....	336
Bài tập .....	336
<b>7.4. Đạo hàm và vi phân cấp cao. Công thức Taylor .....</b>	<b>337</b>
7.4.1. Đạo hàm cấp cao.....	337
7.4.2. Vi phân cấp cao .....	339
7.4.3. Công thức Taylor .....	340
Thuật ngữ then chốt.....	348
Bài tập .....	348
<b>7.5. Ứng dụng đạo hàm trong toán học .....</b>	<b>349</b>
7.5.1. Tính các giới hạn dạng vô định.....	349
7.5.2. Đạo hàm và xu hướng biến thiên của hàm số.....	353
7.5.3. Tìm các điểm cực trị của hàm số.....	355
7.5.4. Liên hệ giữa đạo hàm cấp 2 và tính lồi lõm của hàm số .....	360
Thuật ngữ then chốt.....	363
Bài tập .....	363
<b>7.6. Sử dụng đạo hàm trong phân tích kinh tế .....</b>	<b>366</b>
7.6.1. Ý nghĩa của đạo hàm trong kinh tế học .....	366
7.6.2. Tính hệ số co dãn .....	369
7.6.3. Quan hệ giữa hàm bình quân và hàm cận biên.....	371
7.6.4. Sự lựa chọn tối ưu trong kinh tế .....	372
Thuật ngữ then chốt.....	375
Bài tập .....	375
<b>Chương 8. HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ.....</b>	<b>377</b>
<b>8.1. Các khái niệm cơ bản .....</b>	<b>377</b>
8.1.1. Hàm số hai biến số .....	377
8.1.2. Hàm số n biến số .....	382
8.1.3. Phép hợp hàm .....	385
8.1.4. Các hàm số thường gặp trong phân tích kinh tế .....	385

Thuật ngữ then chốt.....	3389
Bài tập .....	3389
<b>8.2. Giới hạn và tính liên tục.....</b>	<b>3391</b>
8.2.1. Giới hạn của hàm 2 biến .....	3391
8.2.2. Giới hạn của hàm n biến.....	3395
8.2.3. Hàm số liên tục .....	3397
Thuật ngữ then chốt.....	3398
Bài tập .....	3398
<b>8.3. Đạo hàm riêng và vi phân .....</b>	<b>3399</b>
8.3.1. Số gia riêng và số gia toàn phần .....	3399
8.3.2. Đạo hàm riêng .....	4401
8.3.3. Đạo hàm riêng của hàm hợp .....	4402
8.3.4. Vi phân.....	4403
8.3.5. Đạo hàm riêng và vi phân cấp cao .....	4405
8.3.6. Ứng dụng trong kinh tế học .....	4410
Thuật ngữ then chốt.....	4415
Bài tập .....	4416
<b>8.4. Hàm thuần nhất .....</b>	<b>4419</b>
8.4.1. Khái niệm hàm thuần nhất và công thức Euler.....	4419
8.4.2. Vấn đề hiệu quả của quy mô sản xuất.....	4421
Thuật ngữ then chốt.....	4422
Bài tập .....	4422
<b>8.5. Hàm ẩn.....</b>	<b>4423</b>
8.5.1. Hàm ẩn một biến.....	4423
8.5.2. Hàm ẩn n biến.....	4427
8.5.3. Hệ hàm ẩn .....	4431
8.5.4. Tỷ lệ thay thế cận biên.....	4435
8.5.5. Phân tích tĩnh so sánh trong Kinh tế học .....	4436
Thuật ngữ then chốt.....	4440
Bài tập .....	4440
<b>Chương 9. CỰC TRỊ CỦA HÀM NHIỀU BIỂN .....</b>	<b>4442</b>
<b>9.1. Cực trị không có điều kiện ràng buộc.....</b>	<b>4442</b>
9.1.1. Khái niệm cực trị và điều kiện cần .....	4442